(2) 衍射反比率

$$\Delta x_0 = 2f\frac{\lambda}{a}$$

波长越长，条纹宽度越宽，衍射越明显

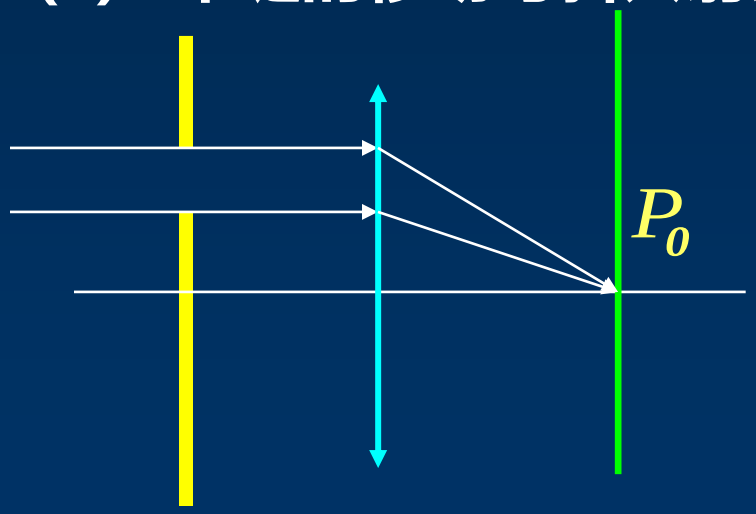
缝宽越小，条纹宽度越宽，衍射越明显

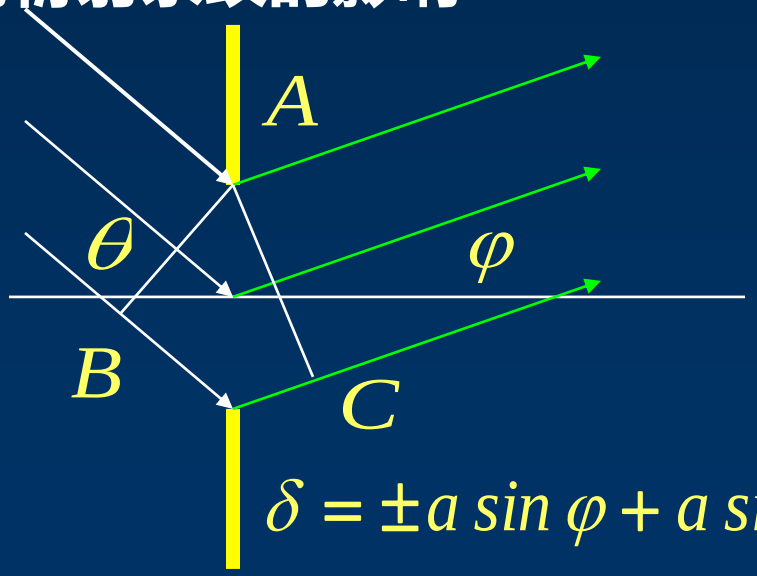
当 a 足够大时，$\frac{\lambda}{a} \to 0 \quad \Delta x \to 0$ ⇒ **单一的明条纹**

退化为几何光学

∴几何光学是波动光学在 $\lambda / a \to 0$ 时的极限情形

(3) 单缝的移动与斜入射对衍射条纹的影响





$$\delta = \pm a\sin\varphi + a\sin\theta$$

(4) 单缝衍射的强度分布

例1： 如图示，设有一波长为 λ 的单色平面波沿着与缝平面的法线成 θ 角的方向入射到宽为 a 的单缝 AB 上。

求： 写出各级暗条纹对应的衍射角 φ 所满足的条件。

解： 在狭缝两个边缘处，衍射角为 φ 的两光的光程差为

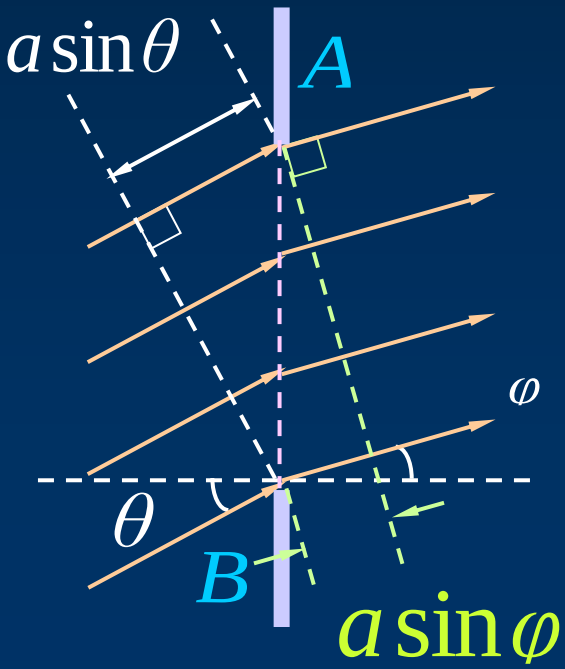
$$\Delta = a(\sin\varphi - \sin\theta)$$

对于暗纹有 $\Delta = \pm k\lambda$

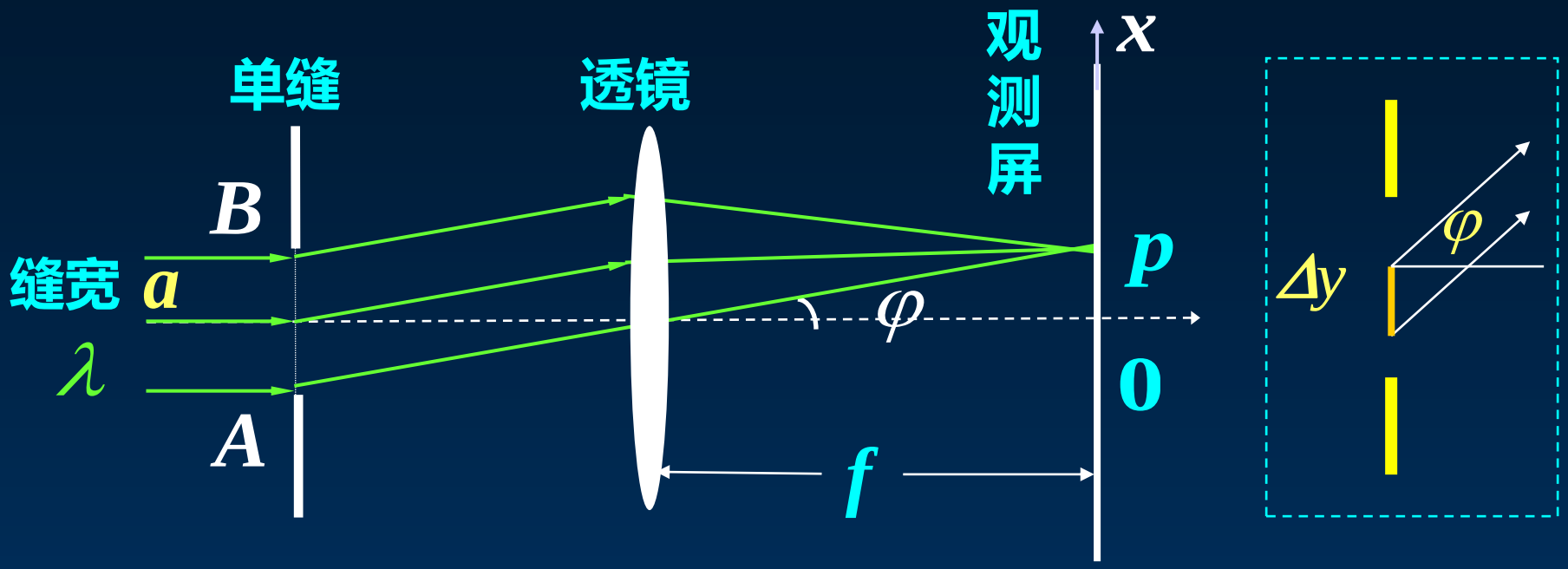
则 $a(\sin\varphi - \sin\theta) = \pm k\lambda$

$$\sin\varphi = \pm\frac{k\lambda}{a} + \sin\theta$$

$$(k = 1,2,3,\cdots)$$



四、振幅矢量合成法



将缝 a 分成 N 个窄带，每个窄带的宽度为 $\Delta y = a/N$

每个窄带发的子波在 P 点振幅近似相等，设为 ΔE_0

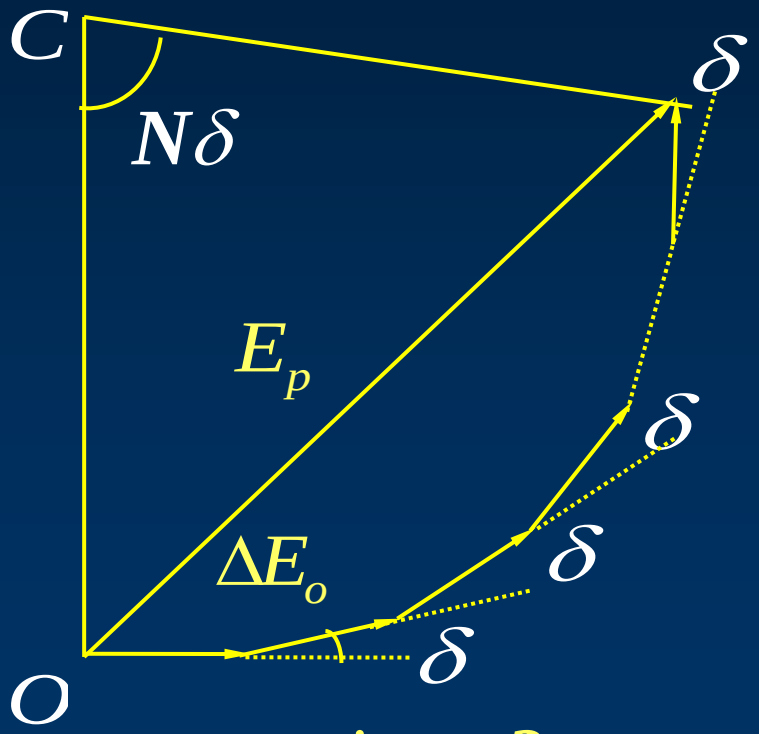
相邻窄带在 P 点引起振动的相位差为

$$\delta = \frac{\Delta y \sin\varphi}{\lambda}\cdot 2\pi = \frac{a\cdot\sin\varphi}{N}\cdot\frac{2\pi}{\lambda}$$ （N 很大）

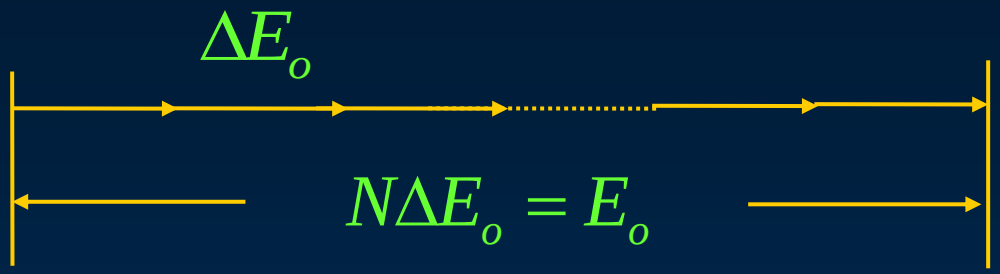
P 处是多个同方向、同频率、同振幅、初相依次差一个恒量的谐振动合成，其结果为谐振动。

对 O 点 $\varphi = 0, \delta = 0$

对其它点 P $E_p < E_o$



$$\delta = \frac{a \cdot \sin\varphi}{N} \cdot \frac{2\pi}{\lambda}$$



$$|E_p| = |\Delta E_0| \sin\frac{N\delta}{2} / \sin\frac{\delta}{2}$$

$$= |\Delta E_0| \frac{\sin u}{\sin\frac{u}{N}} = E_0 \frac{\sin u}{u}$$

$$u = \frac{\pi a}{\lambda} \sin\varphi$$

单缝衍射光强公式

$$I = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2}$$

由 $I = I_o\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$ $(u = \frac{\pi a \sin\varphi}{\lambda})$ 可得

(1) 主极大（中央明纹）位置：

$$\varphi = 0, \Rightarrow u = 0 \quad \rightarrow \frac{\sin u}{u} = 1 \quad \rightarrow I = I_o = I_{max}$$

(2) 极小（暗纹）位置：

$$u = \pm k\pi, \quad k = 1,2,3,..... \sin u = 0 \rightarrow I = 0$$

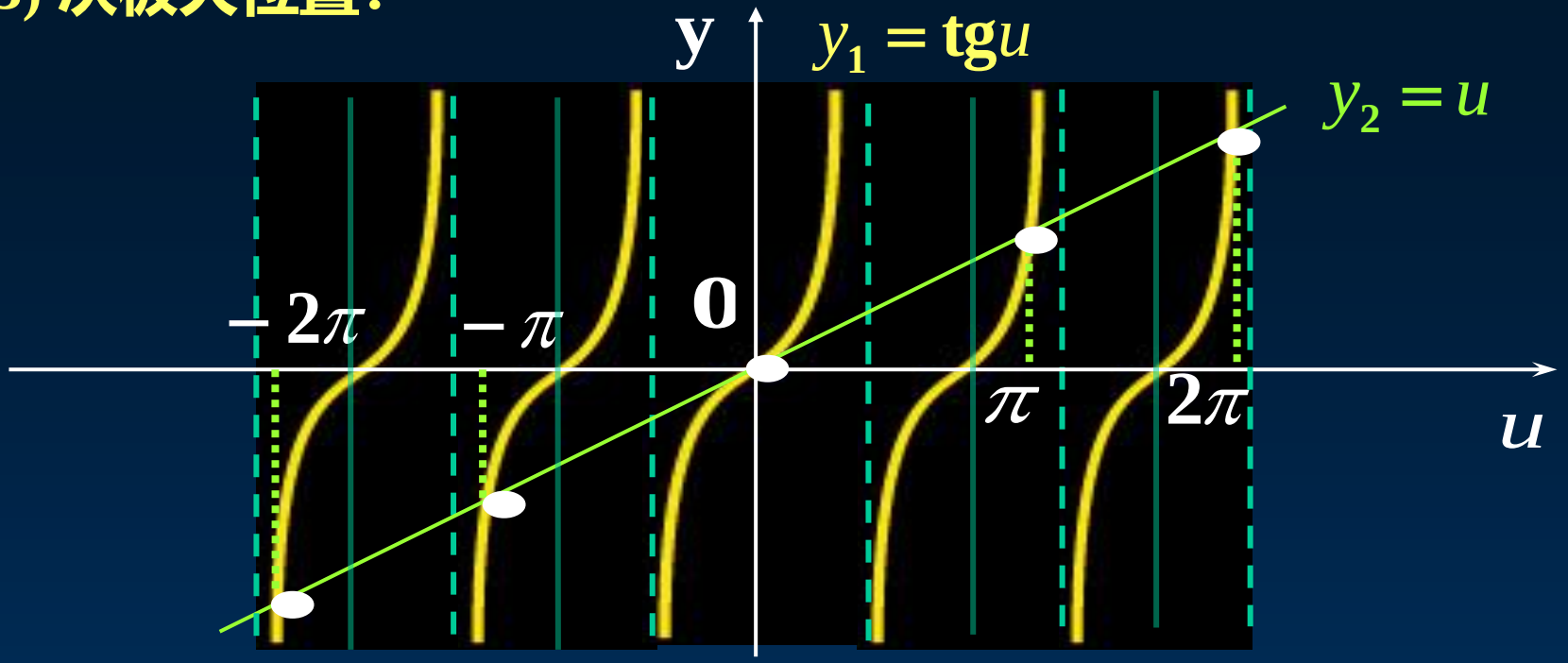
由 $u = \frac{\pi a \sin\varphi}{\lambda} = \pm k\pi$ 得 $a \sin\varphi = \pm k\lambda$

或 $N\delta = \pm 2k\pi \rightarrow a \sin\varphi = \pm k\lambda \quad k = 1,2,3,.....$

} 暗纹公式

(3) 次极大位置： $dI / du = 0 \rightarrow \mathrm{tg}u = u$ —— 超越方程

(3) 次极大位置:



得 $u = \pm 1.43\pi, \pm 2.46\pi, \pm 3.47\pi, \cdots$

次极大（次级明纹）位置:

$$\begin{cases} a\sin\varphi = \pm 1.43\lambda, \pm 2.46\lambda, \pm 3.47\lambda, \cdots \\ a\sin\varphi = (2k+1)\lambda/2 \end{cases}$$

用半波带法得到的单缝衍射的明纹条件是很好的近似!

(4) 次明纹的光强比率

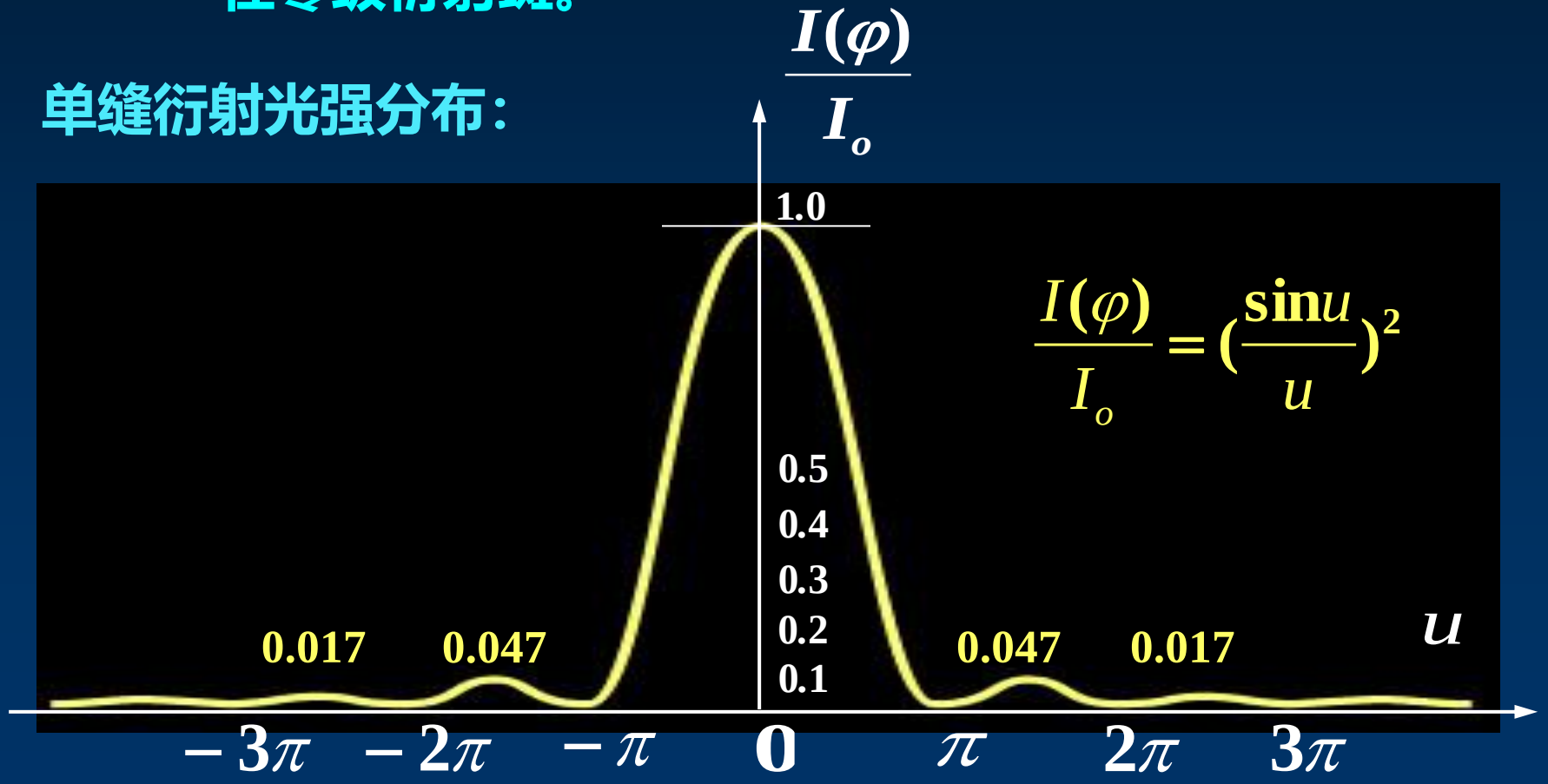
$$I = I_o\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$$

从中央明纹向两侧各次极大的光强依次为：

$0.0472I_o, 0.0165I_o, 0.0083I_o, \ldots\ldots$

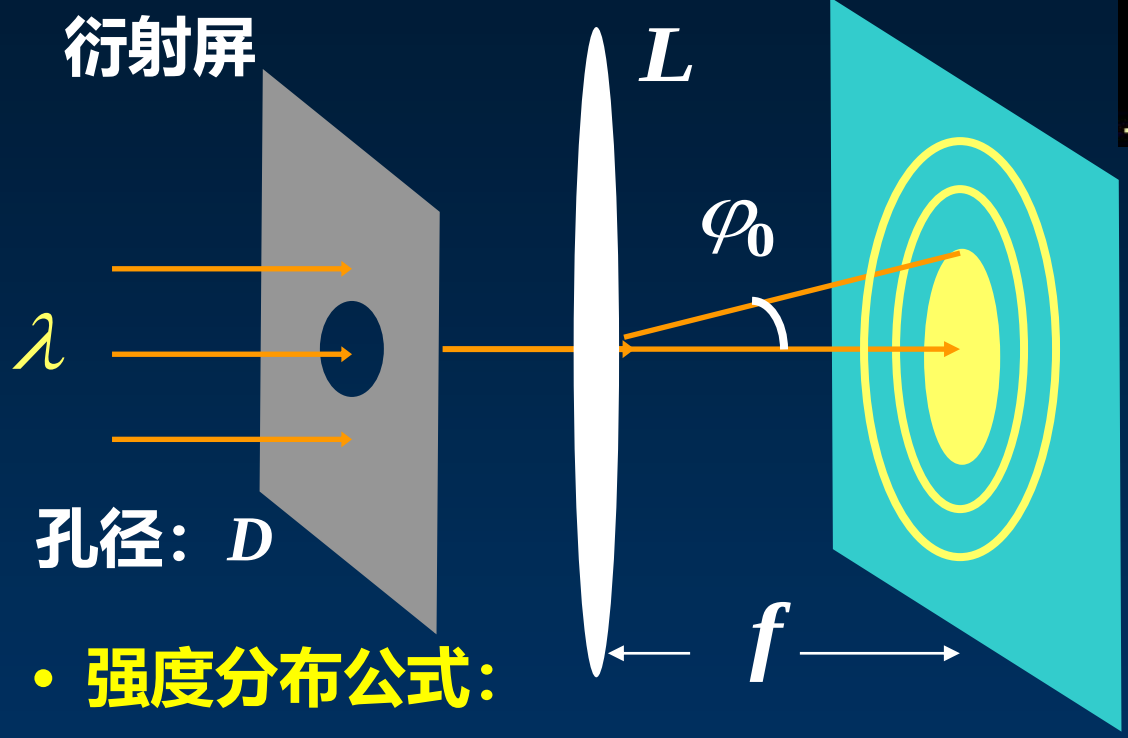
结论： I**（次极大）<<** I**（主极大），绝大部分光强都集中在零级衍射斑。**

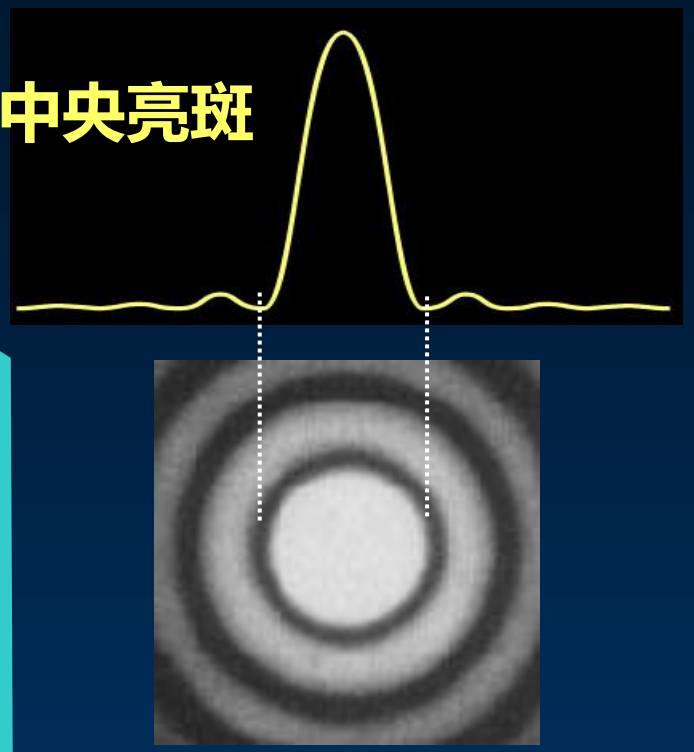
单缝衍射光强分布：



五、光学仪器的分辨本领

1. 圆孔的夫琅禾费衍射





艾里斑（Airy disk）

- **强度分布公式：**

$$I = I_0\left[1-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}\left(\frac{u^2}{2!}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{u^3}{3!}\right)^2+\cdots\right]=I_0\frac{J_1^{\,2}(2u)}{u^2}$$

$u=\pi a\sin\varphi/\lambda$，$a$为圆孔半径　$J_1^{\,2}(2u)$ **为一阶贝塞耳函数**

中央明纹： 当 $u=0 \rightarrow \varphi=0$ $I=I_0$

圆孔衍射暗纹位置 $u=0.61\pi, 1.12\pi, 1.62\pi, \ldots\ldots$

$$\sin\varphi = 0.61\frac{\lambda}{a}, 1.12\frac{\lambda}{a}, 1.62\frac{\lambda}{a}, \ldots\ldots$$

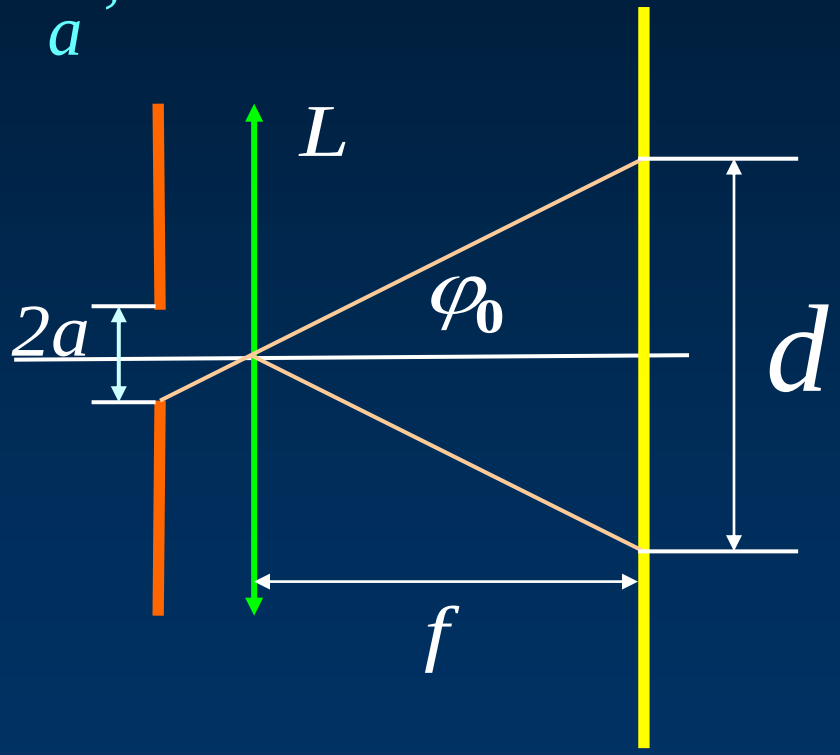
2. 艾里斑的半角宽度与直径

$$a\sin\varphi_0 = 0.61\lambda \approx a\varphi_0$$

$$\boxed{\varphi_0 = 0.61\frac{\lambda}{a} = 1.22\frac{\lambda}{D}}$$

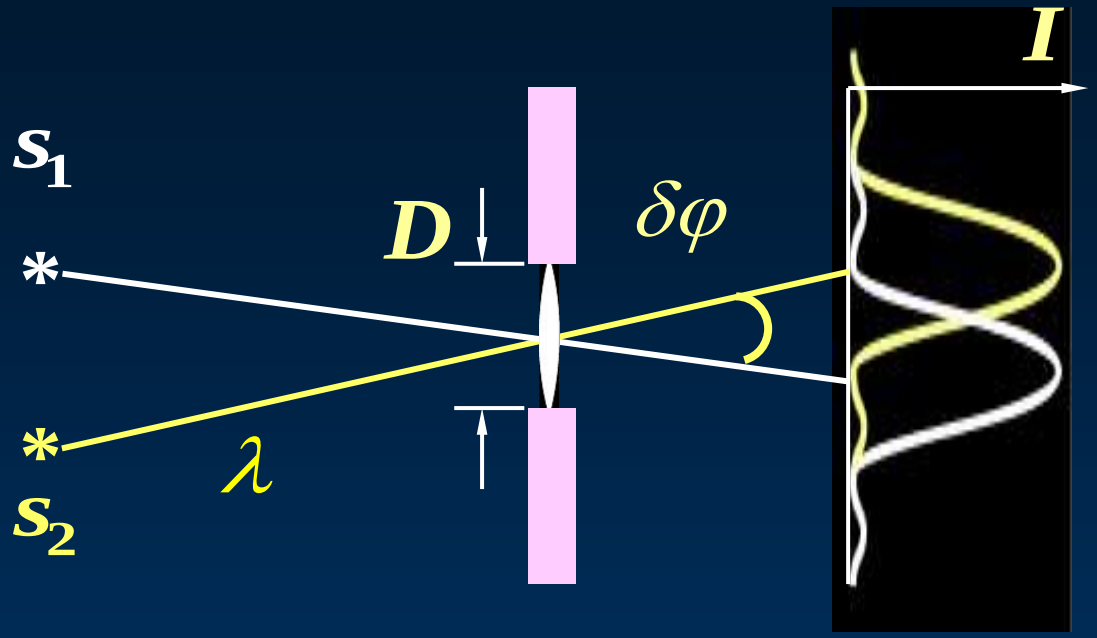
$$tg\varphi_0 = \frac{d}{2f} \approx \sin\varphi_0 = 0.61\frac{\lambda}{a}$$

$$\boxed{d = 1.22\frac{\lambda f}{a} = 2.44\frac{\lambda f}{D}}$$



圆孔半径越小，艾里斑越大，衍射越明显。

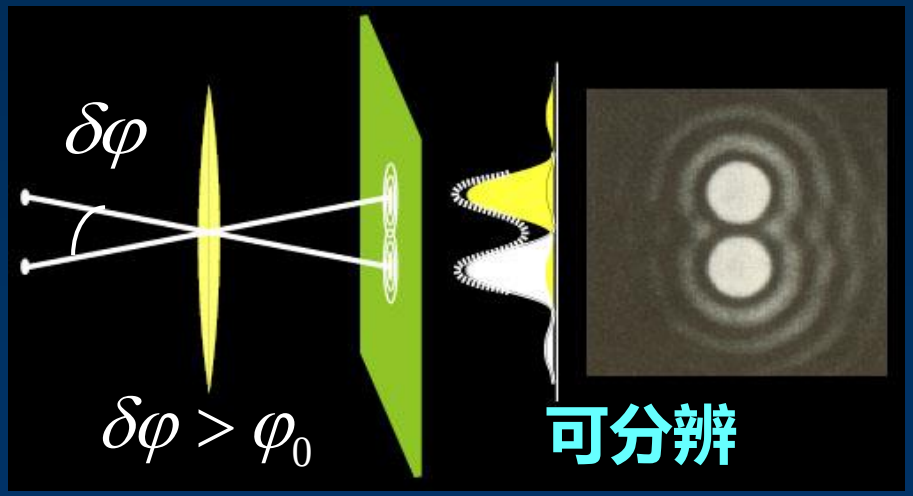
3. 仪器分辨本领（Rayleigh criterion）

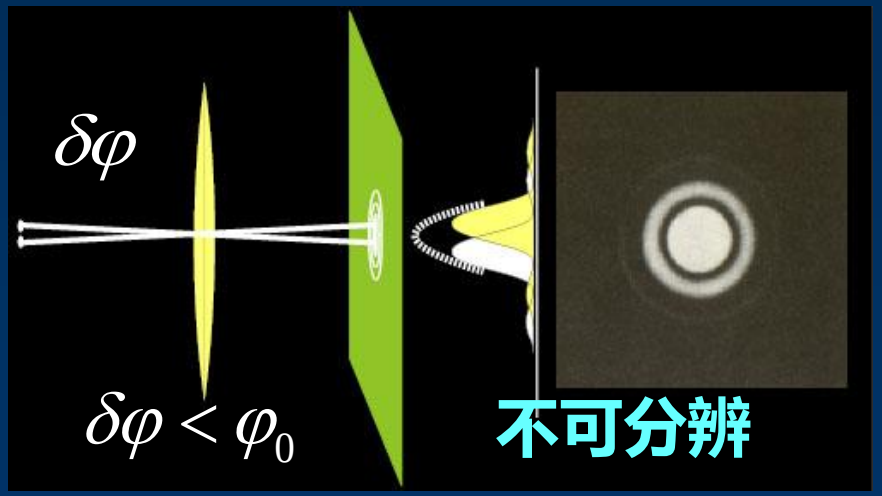


瑞利判据:

两个等光强非相干物点，若一象斑的中心恰好落在另一象斑边缘(第一暗纹处)，则两物点恰能被分辨。

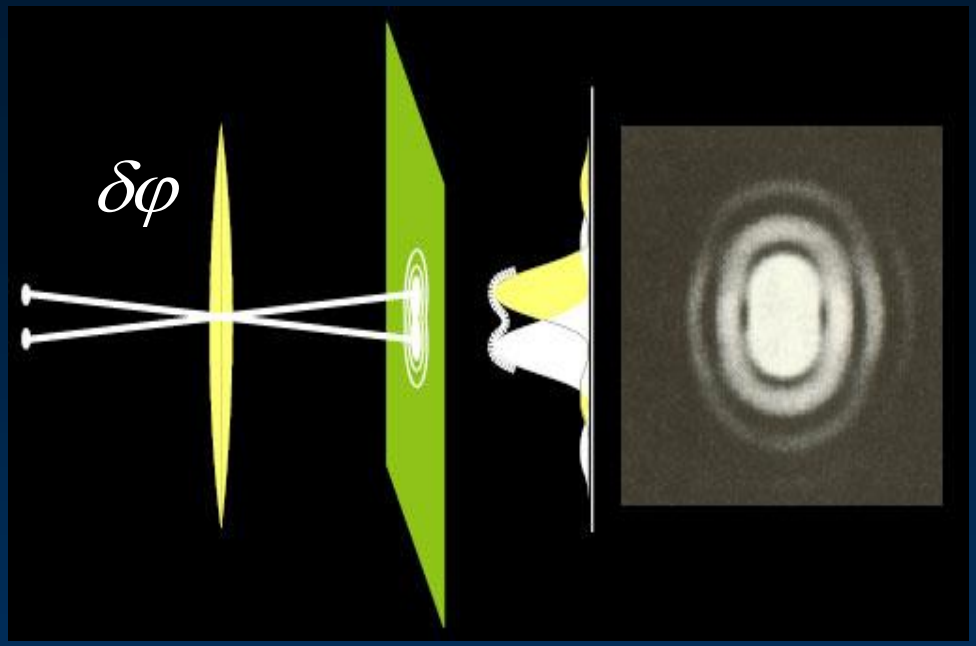
$$\varphi_0 = \delta\varphi$$





最小分辨角(angle of minimum resolution)

$$\delta\varphi = \varphi_0 \approx 1.22\frac{\lambda}{D}$$



分辨本领（resolving power）

$$R \equiv \frac{1}{\varphi_0} = \frac{D}{1.22\lambda}$$

$\delta\varphi = \varphi_0$ **恰能分辨**

提高仪器分辨本领的基本方法：

$$\left.\begin{matrix} D\uparrow \\ \lambda\downarrow \end{matrix}\right\} \rightarrow R\uparrow$$

望远镜： $\uparrow D \rightarrow \uparrow R$

显微镜： $\downarrow \lambda \rightarrow \uparrow R$

注意：瑞利判据并不是一个很严格的判据。

例1： 对于可见光，平均波长为 $\lambda = 550nm$，试比较物镜直径为 **5.0 cm** 的普通望远镜和直径为 **6.0 m** 的天文望远镜的分辨本领。

解： $$\delta\varphi = \varphi_0 \approx 1.22\frac{\lambda}{D}$$

$$\begin{cases} \delta\varphi_1 = \varphi_1 = 1.22\dfrac{\lambda}{0.05} = 1.3\times10^{-5}\,rad \\ \delta\varphi_2 = \varphi_2 = 1.22\dfrac{\lambda}{6.0} = 1.1\times10^{-7}\,rad \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\delta\varphi_2}{\delta\varphi_1} = \frac{D_1}{D_2} = \frac{1}{120}$$

天文望远镜的分辨本领是普通望远镜的120倍。

例2： 在迎面驶来的汽车上，两盏前灯相距120 cm，试问人在离汽车多远的地方，眼睛恰能分辨这两盏灯？ 设夜间人眼瞳孔直径为5.0 mm，入射光波 $\lambda = 550\text{nm}$

解： 人眼的最小分辨角：

$$\delta\varphi = \varphi_0 \approx 1.22\frac{\lambda}{D}$$

设人到汽车的最远距离为 S， $d = 120\text{cm} = 1.2\text{m}$

由 $d \approx S \cdot \delta\varphi$ 得：

$$S \approx \frac{d}{\delta\varphi} = \frac{Dd}{1.22\lambda} = \frac{5.0\times10^{-3}\times1.20}{1.22\times550\times10^{-9}} = 8.94\times10^{3}\,m$$

通常亮度下，人眼瞳孔直径为3 mm，R =？ 若在黑板上有两条细线，间距2 mm，你能在多远处分辨？

解： $\delta\varphi = 1.22\lambda / D = 2.24\times10^{-4}\,rad \approx 1'$ $\lambda = 550nm$

$\Rightarrow R = 1/\delta\varphi = 1/分$

设两细线间距为 ΔS，你与细线相距为 L，两线对眼睛的的张角为 $\theta = \delta\varphi$，有

$$\theta = \delta\varphi = \frac{\Delta S}{L} \Rightarrow L = \frac{\Delta S}{\delta\varphi} = 8.9m$$

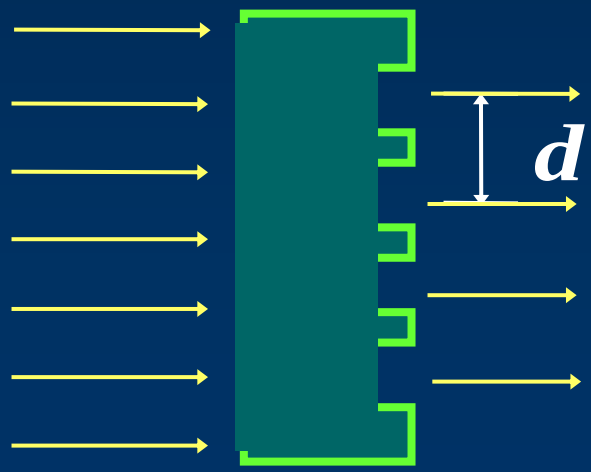
15-8 光栅衍射

单缝中央明纹线宽度 $\boxed{l_0 = 2f\lambda/a}$ $\Longrightarrow$ 测 λ

一、光栅的作用原理

狭义：平行等宽、等间距的多狭缝器件

广义：能等宽、等距分割波面的器件



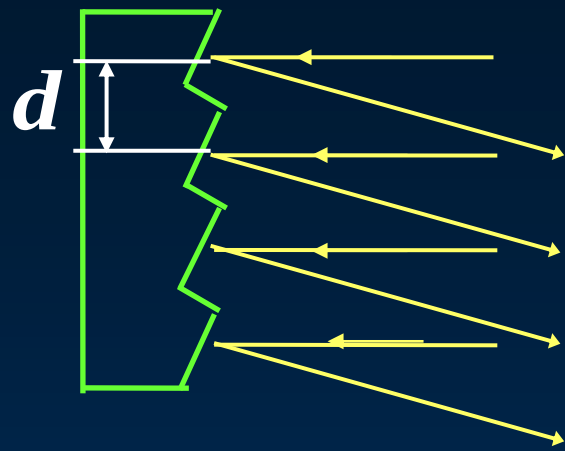
设 a — 透光（反光）部分宽度，

b — 不透光 (不反光) 部分宽度

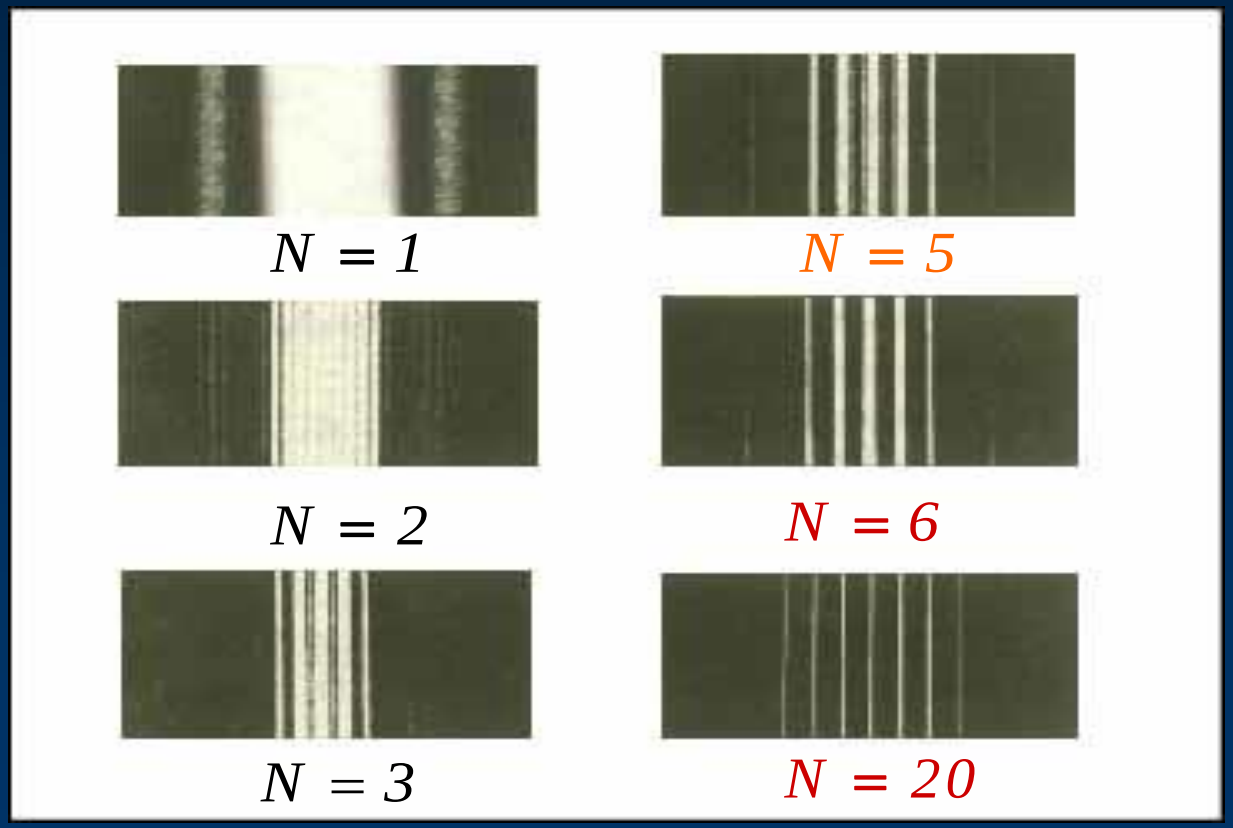
- **光栅常数（grating constant）：**

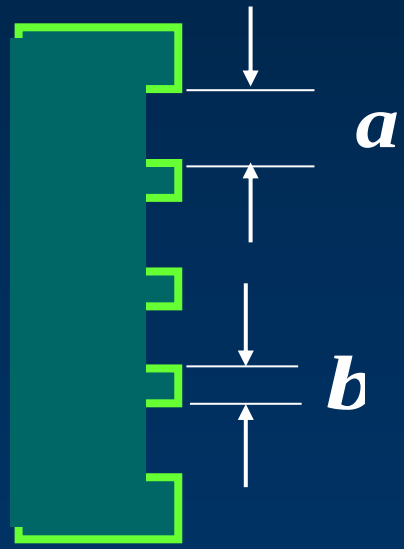
$$d = a + b$$

反射光栅



衍射图样





可见光范围：

$600 \sim 1200$ 条/mm

- 光栅衍射的主要特征：

缝数增加 ⟹ 明纹变细，明纹强度增加

缝数增加 ⟹ 明纹间的暗区扩大

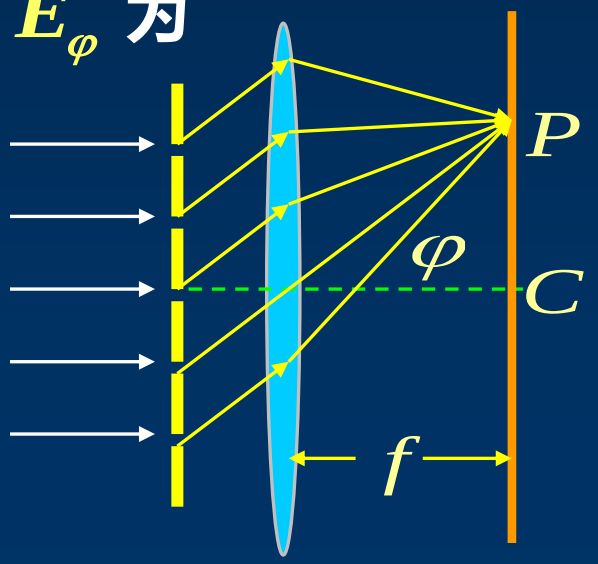
强度分布有单缝衍射痕迹——曲线包络与单缝衍射强度形状相同

结论：多缝干涉 + 所有的单缝衍射 = 光栅衍射

二、光栅衍射的强度公式：

设：各单缝在 P 点(衍射角 φ) 的光振动振幅 E_φ 为

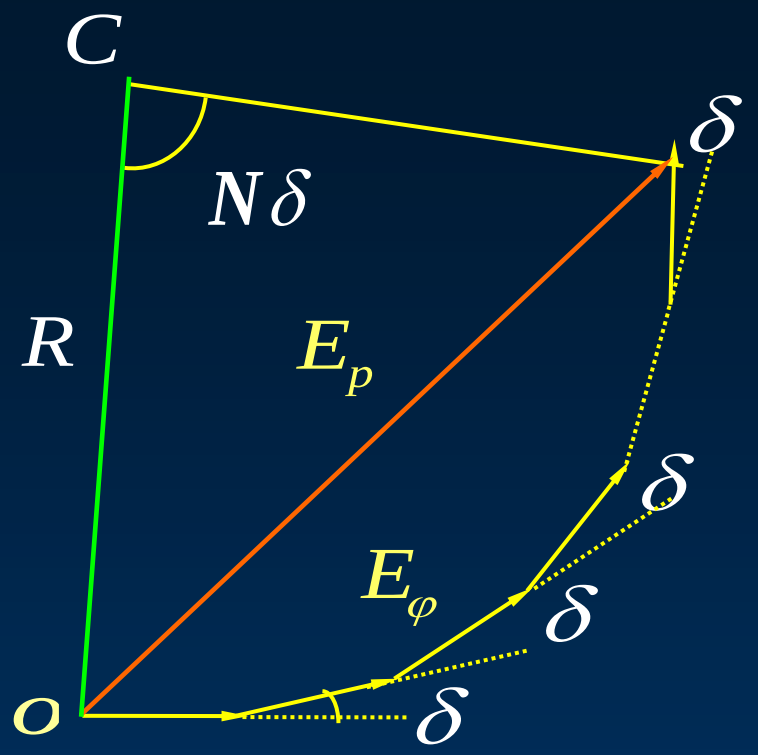
$$E_\varphi = E_{m单}\frac{\sin\alpha}{\alpha} \quad \left(\alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\varphi\right)$$



- 任意相邻两缝中衍射角为 φ 的光在 P 点相干叠加，

光程差 $\Delta = (a+b)\sin\varphi$

相位差 $\delta = \dfrac{2\pi}{\lambda}(a+b)\sin\varphi$



- P点的光振动振幅 E_P为 N 个振幅为 E_φ，位相依次相差为 δ的振动相干叠加，

用振幅矢量法求出：

$$\left.\begin{aligned} E_p &= 2R\sin N\delta/2 \\ E_\varphi &= 2R\sin\delta/2 \end{aligned}\right\} \quad E_p = E_\varphi \cdot \frac{\sin N\delta/2}{\sin\delta/2}$$

$$= E_{m单} \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\sin N\beta}{\sin\beta}$$

$$\beta = \frac{\delta}{2} = \frac{\pi d}{\lambda}\cdot\sin\varphi$$